⋆

Exercice 1 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. Pour tout réel a, on note $E_a(f) = \{x \in E \mid f(x) = a \cdot x\}$

1) Vérifier que pour tout réel a, $E_a(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

On dit qu'un réel a est une valeur propre de f si et seulement si il existe un vecteur x non nul de E tel que $f(x) = ax$.

2) Montrer que a est une valeur propre de f si et seulement si $E_a(f) \neq \{0\}$.
3) Montrer que si λ et μ sont deux réels distincts, alors $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont en somme directe.
4) Montrer que si $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont r valeurs propres distinctes, alors $E_{\lambda_1}(f), ..., E_{\lambda_r}(f)$ sont en somme directe.
5) Montrer que si f admet n valeurs propres distinctes, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

⋆

Exercice 2 — Voir correction

1) Montrer que les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure sont sur sa diagonale.
2) Donner un exemple de matrice carrée d'ordre 2 dont aucune des valeurs diagonale n'est valeur propre.

⋆

Exercice 3 — Voir correction

1) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M est inversible si et seulement si ${}^tM$ est inversible.
2) Soit A un matrice carrée d'ordre n et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. Montrer que λ est valeur propre de ${}^tA$.

⋆

Exercice 4 — Voir correction

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que f n'est pas diagonalisable.

⋆

Exercice 5 — Voir correction

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Justifier que f est diagonalisable, puis déterminer une base de diagonalisation.

⋆

Exercice 6 — Voir correction

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $X^2 - 4X - 5$ est un polynôme annulateur de A.
2) Montrer que $(u + \mathrm{Id}) \circ (u - 5\mathrm{Id}) = (u - 5\mathrm{Id}) \circ (u + \mathrm{Id}) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$
3) En déduire que $\mathrm{Im}(u + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(u - 5\mathrm{Id})$ et que $\mathrm{Im}(u - 5\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$.
4) En étudiant le rang de $u + \mathrm{Id}$ et $u - 5\mathrm{Id}$, montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - 5\mathrm{Id}) \geq 3$.
5) En déduire que u est diagonalisable.

⋆
Exercice 7 — Voir correction

On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_1 + x_3, x_2 + x_4)$$

1) Déterminer la matrice représentative de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2) Montrer que 0 et 2 sont valeurs propres de φ.
3) Montrer que φ est diagonalisable en précisant la dimension de ses sous-espaces propres.

⋆
Exercice 8 — Voir correction

On considère l'application :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & XP'(X) + P(X+1) \end{array}$$

1) Vérifier que u est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Déterminer la matrice représentative de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$
3) En déduire que u est diagonalisable.

⋆ ⋆
Exercice 9 — Voir correction

Soit A un matrice carrée de taille n à coefficients réels. On suppose que A est de rang 1 et que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

1) Justifier qu'il existe deux matrices X et Y dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $A = {}^tXY$.
2) En déduire que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.
3) En déduire qu'il existe un réel c non nul tel que $X(X-c)$ est un polynôme annulateur de A.
4) On pose $F = \mathrm{Ker}(A)$ et $G = \mathrm{Ker}(A - cI)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et en déduire que A est diagonalisable.

⋆ ⋆
Exercice 10 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Soit $k \geq 1$. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$.
2)
   a) Démontrer que si $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})$ alors $\mathrm{Ker}(f^{p+1}) = \mathrm{Ker}(f^{p+2})$.
   b) Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :
      - Si $k < p$, alors $\mathrm{Ker}(f^p) \neq \mathrm{Ker}(f^{k+1})$
      - Si $k \geq p$, alors $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.
   c) Démontrer que $p \leq n$.
3) Démontrer que si $k < p$, alors $\mathrm{Im}(f^k) \neq \mathrm{Im}(f^{k+1})$ et si $k \geq p$, alors $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1})$.
4) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^p)$ sont supplémentaires.
5) Démontrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E tels que F et G sont supplémentaires dans E, $f_{|F}$ est nilpotent et $f_{|G}$ induit un automorphisme de G.
6) Pour tout $k \geq 1$ on note $d_k = \dim(\mathrm{Im}(f^k))$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})$ est décroissante.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $f(0) = 0_E = a \cdot 0_E$ donc $0_E \in E_a(f)$. Ainsi $E_a(f)$ est non vide.
Soient x et y dans $E_a(f)$ et soit λ un réel.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= \lambda f(x) + \mu f(y) \text{par linéarité de } f \\ &= \lambda a \cdot x + \mu a \cdot y \qquad \text{car } x, y \in E_a(f) \\ &= a \cdot (\lambda \cdot x + \mu y) \end{aligned}$$

donc $\lambda \cdot x + \mu y \in E_a(f)$. <u>On a donc montré que $E_a(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.</u>

2) On a simplement :

$$\begin{aligned} a \text{ est valeur propre de } f &\iff \text{Il existe } x \in E \setminus \{0\},\ f(x) = ax \\ &\iff E_a(f) \neq \{0\} \end{aligned}$$

3) Soit $x \in E_\lambda(f) \cap E_\mu(f)$. On a :

$$f(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad f(x) = \mu x$$

donc $\lambda x = \mu x$ donc $(\lambda - \mu)x = 0$ et comme $\lambda \neq \mu$ on en déduit $x = 0$. Ainsi $E_\lambda(f) \cap E_\mu(f) = \{0_E\}$ donc $E_\lambda(f) + E_\mu(f) = E_\lambda(f) \oplus E_\mu(f)$.

4) On raisonne par récurrence sur r, on a déjà montré le cas $r = 2$. Supposons que le résultat est vrai jusqu'à $r - 1$ et supposons que $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont r valeurs propres distinctes de f, et soit $(x_1, ..., x_r) \in E_{\lambda_1}(f) \times \cdots \times E_{\lambda_r}(f)$ tel que :

$$x_1 + \cdots + x_r = 0 \tag{1}$$

Alors par linéarité de f :

$$f(x_1) + \cdots + f(x_r) = f(x_1 + \cdots + x_r) = f(0) = 0$$

donc

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r = 0 \tag{2}$$

En faisant $(2) - \lambda_r(1)$ on obtient :

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_r)x_1}_{\in E_{\lambda_1}} + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_r)x_2}_{\in E_{\lambda_2}} + \cdots + \underbrace{(\lambda_{r-1} - \lambda_r)x_{r-1}}_{\in E_{\lambda_{r-1}}} = 0$$

et par hypothèse de récurrence $E_{\lambda_1}(f), ..., E_{\lambda_{r-1}}(f)$ sont en somme directe donc :

$$(\lambda_1 - \lambda_r)x_1 = \cdots = (\lambda_{r-1} - \lambda_r)x_r = 0$$

et comme $\lambda_i - \lambda_r \neq 0$ pour tout $i \in \{1, ..., r-1\}$ on a finalement :

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{r-1} = 0$$

d'où immédiatement $x_r = 0$ grâce à (1). On a donc montré que $E_{\lambda_1}(f), ..., E_{\lambda_{r(f)}}$ sont en somme directe, donc par récurrence le résultat est vrai quel que soit le nombre de valeurs propres.

5) Si f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ alors :

$$\dim(E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}(f)) = \dim(E_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(E_{\lambda_n})$$

Or si λ est une valeur propre $E_\lambda(f) \neq \{0\}$ donc $\dim(E_\lambda(f)) \geq 1$ d'où :

$$\dim(E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}(f)) \geq n$$

et comme $E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}(f) \subset E$ on en déduit que $\dim(E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}(f)) = n$ et que $E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}(f) = E$ (et que toutes les inégalités sont des égalités dans ce raisonnement donc pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $\dim(E_{\lambda_k}) = 1$).
En prenant une base $\mathcal{B}$ formé d'un vecteur non nul de chacun des sous espace propre on a bien :

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2 :

1) Soit $T=\begin{pmatrix}a_1 & * & \cdots & \cdots & *\\ 0 & a2 & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & a_{n-1} & *\\ 0 & \cdots & \cdots & * & a_n\end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure.

   Pour tout réel λ, λ est valeur propre de T si et seulement si $T-\lambda I_n$ n'est pas inversible. Or,

$$T-\lambda I_n=\begin{pmatrix}a_1-\lambda & * & \cdots & \cdots & *\\ 0 & a2-\lambda & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & a_{n-1}-\lambda & *\\ 0 & \cdots & \cdots & * & a_n-\lambda\end{pmatrix}$$

   est encore une matrice triangulaire supérieure. Elle est non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul, si et seulement si λ est l'une des valeurs diagonales. Ainsi les valeurs propres de T sont exactement ses coefficients diagonaux.

2) Prenons la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. La matrice $A-\lambda I_2=\begin{pmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix}$ a son déterminant qui vaut $\det(A-\lambda I_2)=\lambda^2+1$. Il ne s'annule pour aucune valeur de λ donc $A-\lambda I_2$ est toujours inversible donc A n'admet aucune valeur propre.

Correction de l'exercice 3 :

1) M est inversible si et seulement si il existe une matrice carrée N de même taille telle que $MN=I$, on a alors ${}^t(MN)={}^tI=I$ donc ${}^tN{}^tM=I$, ainsi ${}^tM$ est inversible et ${}^tN$ est l'inverse de ${}^tM$.

2) D'après la question précédente, A est inversible si et seulement si ${}^tA$ est inversible.
   Par contraposée on a donc : A n'est pas inversible si et seulement si ${}^tA$ n'est pas inversible.
   Supposons que λ est valeur propre de A, alors $A-\lambda I$ n'est pas inversible, donc d'après la question précédente ${}^t(A-\lambda_I)$ n'est pas inversible donc $({}^tA-\lambda I)$ n'est pas inversible. On en conclut que λ est une valeur propre de ${}^tA$.

Correction de l'exercice 4 : A est triangulaire supérieure et on lit que 2 est la seule valeur propre de A donc de f. Si f était diagonalisable, il existerait une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=2I$ et une matrice inversible P telle que $A=P^{-1}2IP=2P^{-1}P=2I$. Or $A\neq 2I$ donc f n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 5 : Par lecture d'une matrice triangulaire supérieure, f admet 2, 0 et -4 comme valeurs propres. f a trois valeurs propres distinctes et $\dim(\mathbb{R}^3)=3$ donc f est diagonalisable (voir dernière question de l'exercice 1) et chaque sous espace propre est de dimension 1.

On cherche une base de $\mathrm{Ker}(C-2I)$, $\mathrm{Ker}(C)$ et $\mathrm{Ker}(C+4I)$ pour obtenir une base de diagonalisation. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}X\in\mathrm{Ker}(C-2I)&\iff\begin{pmatrix}0 & 1 & -3\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0\\ &\iff\left\{\begin{array}{rcl}y-3z&=&0\\ -2y+z&=&0\\ -6z&=&0\end{array}\right.\\ &\iff y=z=0\end{aligned}$$

donc $(1,0,0)$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre 2 et $E_2(f)=\mathrm{Vect}\left((1,0,0)\right)$.

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(C) \iff 2x+y-3z & =0 \\ z = & \ 0 \\ -4z = & \ 0 \end{aligned}$$

$$\iff y=-2x \quad \text{et} \quad z=0$$

donc $(1,-2,0)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 0 et $E_0(f)=\operatorname{Vect}\left((1,-2,0)\right)$.

$$X \in \operatorname{Ker}(C+4I) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 6x+y-3z & = & 0 \\ 4y+z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 6x=-13y \\ \quad z \ = \ -4y \end{array} \right.$$

donc $(13,-6,24)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -4 et $E_{-4}(f)=\operatorname{Vect}\left((13,-6,24)\right)$.
Finalement $\big((1,0,0),(1,-2,0),(13,-6,24)\big)$ est une base de diagonalisation de f.

Correction de l'exercice 6 :

1) $A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&17&4\\8&32&9\end{pmatrix}$ donc :

$$A^2-4A-5I=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&17&4\\8&32&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0&0\\-4&-12&-4\\-8&-32&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

donc X^2-4X-5 est bien un polynôme annulateur de A.

2) $X^2-4X-5)=(X+1)(X-5)$ donc $(A+I)(A-5I)=0$ donc $(u+\mathrm{Id})\circ(u-5\mathrm{Id})=0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. De plus, $(u+\mathrm{Id})$ et $(u-5\mathrm{Id})$ commutent ($P(u)$ et $Q(u)$ commutent si P et u sont des polynômes) donc on a bien :

$$(u+\mathrm{Id})\circ(u-5\mathrm{Id})=(u-5\mathrm{Id})\circ(u+\mathrm{Id})=0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$$

3) Pour tout $x\in\mathbb{R}^3$ $(u-5\mathrm{Id})((u+\mathrm{Id})(x))=0$ donc $\operatorname{Im}(u+\mathrm{Id})\subset\operatorname{Ker}(u-5\mathrm{Id})$ et de même $\operatorname{Im}(u-5\mathrm{Id})\subset\operatorname{Ker}(u+\mathrm{Id})$.

4) Dans la base canonique, la matrice représentative de $u+\mathrm{Id}$ est $A+I=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&4&1\\2&8&2\end{pmatrix}$. $\operatorname{rg}(A+I)=1$ donc $\operatorname{rg}(u+\mathrm{Id})=1$.

La matrice représentative de $u-5\mathrm{Id}$ est $A-5I=\begin{pmatrix}-6&0&0\\1&-2&1\\2&8&-4\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-6&0&0\\1&-2&1\\2&8&-4\end{pmatrix}&=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-6&0&0\\6&-12&6\\6&24&-12\end{pmatrix}\\&=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-6&0&0\\0&-12&6\\0&24&-12\end{pmatrix}\\&=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-6&0&0\\0&-12&6\\0&0&0\end{pmatrix}\\&=2\end{aligned}$$

donc $\operatorname{rg}(u-5\mathrm{Id})=2$. On en déduit d'après les inclusions de la question précédente que $\dim(\operatorname{Ker}(u-5\mathrm{Id}))\geq 1$ et $\dim(\operatorname{Ker}(u+\mathrm{Id}))\geq 2$. Ainsi :

$$\dim(\operatorname{Ker}(u+\mathrm{Id})\oplus\operatorname{Ker}(u-5\mathrm{Id}))=\dim(\operatorname{Ker}(u+\mathrm{Id}))+\dim(\operatorname{Ker}(u-5\mathrm{Id}))\geq 1+2\geq 3$$

5) Comme $\operatorname{Ker}(u+\mathrm{Id})\oplus\operatorname{Ker}(u-5\mathrm{Id})\subset\mathbb{R}^3$ on a finalement $\dim(\operatorname{Ker}(u+\mathrm{Id})\oplus\operatorname{Ker}(u-5\mathrm{Id}))=3$ d'où $\mathbb{R}^3=\operatorname{Ker}(u+\mathrm{Id})\oplus\operatorname{Ker}(u-5\mathrm{Id})$ par inclusion et égalité des dimensions. Ainsi u est diagonalisable et ses valeurs propres sont -1 et 5.

Correction de l'exercice 7 :

1) La matrice représentative de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) La somme des lignes vaut toujours 1 donc $(1,1,1,1)$ est vecteur propre et $\varphi(1,1,1,1) = (2,2,2,2)$ donc 2 est la valeur propre associée.
De plus, M est clairement de rang 2 donc elle n'est pas inversible, donc $\mathrm{Ker}(M) \neq \{0\}$ donc 0 est valeur propre.
3) Comme $\mathrm{rg}(M) = 2$ on a $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = 4 - 2 = 2$ d'après le théorème du rang. $\big((-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\big)$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
On a déjà un vecteur propre associé à la valeur propre 2, cherchons en un autre indépendant : $(1,0,1,0)$ convient donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi - 2\mathrm{Id})) \geq 2$. Comme la somme des dimensions des sous espaces propres est supérieure ou égale à 4 on en conclut que φ est diagonalisable et que $\big((-1,0,1,0),(0,-1,0,1),(1,1,1,1),(1,0,1,0)\big)$ est une base de diagonalisation.
Dans cette base la matrice représentative de φ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 8 :

1) Pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q)(X) = X(\lambda P + \mu Q)'(X) + (\lambda P + \mu Q)(X+1) \\ &= X\lambda P'(X) + X\mu Q'(X) + \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) \\ &= \lambda(XP'(X) + P(X+1)) + \mu(XQ'(X) + Q(X+1)) \\ &= \lambda u(P)(X) + \mu u(Q)(X) \end{aligned}$$

donc $u(\lambda P + \mu Q) = \lambda u(P) + \mu u(Q)$, u est bien linéaire.
De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(XP'(X)) = \deg(X) + \deg(P'(X)) = 1 + n - 1 = n$ et $\deg(P(X+1)) = \deg(P(X)) \leq n$ donc $\deg(XP'(X) + P(X)) \leq \max(\deg(XP'(X)), \deg(P(X))) \leq n$ donc $XP'(X) + P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$.
On a bien pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi u est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, ..., X^n)$. Pour tout $k \in \{0,1,...,n\}$ on a :

$$u(X^k) = kXX^{k-1} + (X+1)^k = kX^k + X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i = (k+1)X^k + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i}_{\deg \leq k-1}$$

donc la matrice de u dans la base canonique a l'allure suivante :

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 2 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & n & * \\ 0 & \cdots & & 0 & n+1 \end{pmatrix}$$

3) $\mathbf{M}_{\mathcal{B}_0}(u)$ est une matrice triangulaire supérieure d'ordre $n+1$ qui admet $n+1$ valeurs propres distinctes, donc u est diagonalisable.

Correction de l'exercice 9 :

1) Question classique déjà vu dans le TD 1 : comme A est de rang 1 on a $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 1$ donc il existe un vecteur $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\,(Y)$. Si on note $C_1, ..., C_n$ les colonnes de A, on sait que $\forall i \in [\![1,n]\!]$,
$C_i \in \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\,(Y)$ donc il existe des réels $x_1, ..., x_n$ tels que $C_i = x_i \cdot Y$. En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ on a bien $A = {}^tXY$.

2) On a donc $A^2 = {}^tXY{}^tXY = {}^tX(Y{}^tX)Y$. Or $Y{}^tX = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \mathrm{tr}(A)$, donc $A^2 = {}^tX\mathrm{tr}(A)Y = \mathrm{tr}(A){}^tXY = \mathrm{tr}(A)A$.
3) Il suffit de poser $c = \mathrm{tr}(A)$, c est non nul par hypohtèse et d'après la question précédente :

$$A^2 = cA$$

donc $A^2 - cA = 0$ d'où $A(A - c) = 0$.
4) Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Si $Z \in F \cap G$, alors $AZ = 0$ et $AZ = cZ$ donc $cZ = 0$ donc $Z = 0$ car $c \neq 0$. $\boxed{\text{On a donc bien } F \cap G = \{0\}}$.
Montrons que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F + G$. Soit $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Raisonnons par analyse-synthèse et supposons qu'il existe $Z_F \in F$ et $Z_G \in G$ tels que $Z = Z_F + Z_G$ (1).
Comme $Z_F \in F$ on a $AZ_F = 0$ et comme $Z_G \in G$ on a $AZ_G = cZ_G$, donc $AZ = AZ_F + AZ_G = cZ_G$ (2). On en déduit en faisant une combinaison linéaire de (1) et (2) que :

$$cZ - AZ = cZ_F + cZ_G - cZ_G = cZ_F$$

et enfin comme $c \neq 0$ on a $\boxed{Z_F = Z - \frac{1}{c}AZ \text{ et } Z_G = \frac{1}{c}AZ.}$
Réciproquement, si on pose $Z_F = Z - \frac{1}{c}AZ$ et $Z_G = \frac{1}{c}AZ$ alors :

$$AZ_F = AZ - \frac{1}{c}A^2Z = AZ - \frac{1}{c}cAZ = AZ - AZ = 0$$

donc $Z_F \in F = \mathrm{Ker}(A)$, et

$$AZ_G = \frac{1}{c}A^2Z = \frac{1}{c}cAZ = c\left(\frac{1}{c}AZ\right) = cZ_G$$

donc $Z_G \in G = \mathrm{Ker}(A - cI)$. Enfin, on a bien :

$$Z_F + Z_G = Z - \frac{1}{c}AZ + \frac{1}{c}AZ = Z$$

On a donc bien $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F + G$.
On a donc montré que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F \oplus G$. De plus comme $\mathrm{rg}(A) = 1$ on a $\dim(F) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - 1$ d'après le théorème du rang, donc $\dim(G) = 1$.
En concaténant une base de F et une base de G on obtient donc une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice représentative de l'endomorphisme f associé à A est diagonale :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 & c \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 10 :

1) Pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f^k)$ on a $f^k(x) = 0$ donc $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$ par linéarité. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$, on a donc montré que $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.
Pour tout $y \in \mathrm{Im}(f^{k+1})$ il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x)$ donc $y = f^k(f(x))$ donc $y \in \mathrm{Im}(f^k)$. On a donc montré que $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$.
2) a) Supposons que $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})$.
On a déjà $\mathrm{Ker}(f^{p+1}) \subset \mathrm{Ker}(f^{p+2})$ d'après le résultat précédent. Montrons que $\mathrm{Ker}(f^{p+2}) \subset \mathrm{Ker}(f^{p+1})$:
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^{p+2})$, alors $0 = f^{p+2}(x) = f^{p+1}(f(x))$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^{p+1})$. Or $\mathrm{Ker}(f^{p+1}) = \mathrm{Ker}(f^p)$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^p)$ autrement dit $f^p(f(x)) = 0$ d'où $f^{p+1}(x) = 0$ c'est à dire $x \in \mathrm{Ker}(f^{p+1})$. On a montré que $\mathrm{Ker}(f^{p+2}) \subset \mathrm{Ker}(f^{p+1})$ donc finalement $\mathrm{Ker}(f^{p+1}) = \mathrm{Ker}(f^{p+2})$.
b) Posons $A = \min\{k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})\}$.
Montrons que A est non vide : si on avait $\mathrm{Ker}(f^k) \subsetneq \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ pour tout entier k, alors la suite $(\dim(\mathrm{Ker}(f^k)))_{k\in\mathbb{N}}$ serait strictement croissante. Or E est de dimension finie n donc cette suite est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, contradiction donc A est non vide.
A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus petit élément. En posant $p = \min\{k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})\}$, p répond à la question posée.
c) La suite $(\dim(\mathrm{Ker}(f^k)))_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante du rang 0 au rang p et à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ donc $p \leq n$ (principe des tiroirs).

3) Si $k < p$ on a $\text{Ker}(f^k) \neq \text{Ker}(f^{k+1})$ donc $\dim(\text{Ker}(f^k)) < \dim(\text{Ker}(f^{k+1})$ par inclusion stricte.
D'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(f^{k+1})) &= n - \dim(\text{Ker}(f^{k+1})) \\ &< n - \dim(\text{Ker}(f^k)) \\ &< \dim(\text{Im}(f^k)) && \text{d'après le théorème du rang} \end{aligned}$$

donc $\text{Im}(f^k) \neq \text{Im}(f^{k+1})$ par inclusion et dimension différentes.
Si $k \geq p$, alors $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^{k+1})$ (par récurrence immédiate à partir de la question 2)a)) donc en appliquant le théorème du rang comme avant on arrive à $\dim(\text{Im}(f^{k+1})) = \dim(\text{Im}(f^k))$ donc $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k+1})$ par inclusion et égalité des dimensions.

4) Montrons que $\text{Ker}(f^p)$ et $\text{Im}(f^p)$ sont en somme directe : soit $y \in \text{Ker}(f^p) \cap \text{Im}(f^p)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^p(x)$. Ainsi $f(y) = f^{p+1}(x)$ mais comme $\text{Im}(f^{p+1}) = \text{Im}(f^p))$, il existe $x' \in E$ tel que $f(y) = f^p(x')$.

5)